

УДК 517.518.234 + 517.547.73

## О КОЭФФИЦИЕНТАХ ТЕЙЛОРА ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ

Р.А.АЛИЕВ

*Бакинский Государственный Университет*  
*aliyevrashid@hotmail.ru*

*В работе, используя понятие  $A$  - интегрирования, получена формула вычисления коэффициентов разложения Тейлора интегралов типа Коши Лебегово интегрируемых функций.*

**Ключевые слова:** интеграл типа Коши, некасательные граничные значения, разложение Тейлора, коэффициенты Тейлора,  $A$  - интеграл.

Пусть  $T = \{z \in C : |z| = 1\}$  – единичная окружность, на котором задана функция  $f$ . Функции

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D^+ = \{z \in C : |z| < 1\},$$

$$F^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D^- = \{z \in C : |z| > 1\},$$

называются интегралами типа Коши функции  $f$ . Аналитические, соответственно, в областях  $D^+$  и  $D^-$  функции  $F^+(z)$  и  $F^-(z)$  разлагаются в ряд Тейлора:

$$F^+(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, \quad z \in D^+, \quad (1)$$

$$F^-(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots + \frac{b_n}{z^n} + \dots, \quad z \in D^-, \quad (2)$$

где коэффициенты  $a_k$ ,  $k \in Z_+$ , и  $b_k$ ,  $k \in N$  определяются равенствами

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_T \tau^{-k-1} f(\tau) d\tau, \quad k \in Z_+, \quad (3)$$

$$b_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_T \tau^{k-1} f(\tau) d\tau, \quad k \in N. \quad (4)$$

В.И.Смирновым [1] доказано, что аналитические функции  $F^+(z)$  и  $F^-(z)$  имеют конечные некасательные граничные значения  $F^+(\tau)$  и  $F^-(\tau)$  почти для всех точек  $\tau \in T$  (см. статью В.П.Хавина [2]).

Из теоремы А.Зигмунда (см., напр., [3, гл.5, С, 3°]) следует, что если  $f \in L \log L(T)$ , то интеграл типа Коши является интегралом Коши, т.е. имеет место равенство

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{F^+(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D^+, \quad (5)$$

$$F^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{F^-(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D^-, \quad (6)$$

и поэтому для коэффициентов  $a_k, k \in Z_+$  и  $b_k, k \in N$  справедливо равенства

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_T \tau^{-k-1} F^+(\tau) d\tau, \quad k \in Z_+, \quad (7)$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_T \tau^{k-1} F^-(\tau) d\tau, \quad k \in N. \quad (8)$$

Если же  $f \in L(T)$ , но  $f \notin L \log L(T)$ , то может оказаться, что граничные значения  $F^+(\tau)$  и  $F^-(\tau)$  не будут интегрируемы на  $T$  в смысле Лебега, и поэтому равенства (5) - (8) в этом случае не удовлетворяются.

В работе, используя понятие  $A$  - интегрирования, получается аналог формул (7) и (8) для случая  $f \in L(T)$ .

Для измеримой на отрезке  $[a, b] \subset R$  комплексной функции  $h$  положим  $[h(x)]_n = [h(x)]^n = h(x)$  при  $|h(x)| \leq n$  и  $[h(x)]_n = n \cdot \operatorname{sgn} h(x)$ ,  $[h(x)]^n = 0$  при  $|h(x)| > n$ ,  $n \in N$ , где  $\operatorname{sgn} z = \frac{z}{|z|}$  при  $z \neq 0$  и  $\operatorname{sgn} 0 = 0$ .

В 1929 году Э. Титчмаршем [4] были введены понятия  $Q$  - и  $Q'$  - интегралов.

**Определение 1.** Если существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [h(x)]_n dx \quad (\text{соответственно, } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [h(x)]^n dx),$$

то функция  $h$  называется  $Q$  - интегрируемой ( $Q'$  - интегрируемой) на  $[a, b]$ , то есть  $h \in Q[a, b]$  ( $h \in Q'[a, b]$ ), а значение этого предела –  $Q$  - интегралом ( $Q'$  - интегралом) этой функции и обозначается

$$(Q) \int_a^b h(x) dx \quad \left( (Q') \int_a^b h(x) dx \right).$$

В этой же работе Э.Титчмаршем установлено, что при исследовании свойств тригонометрических рядов, сопряженных к рядам Фурье суммируемых по Лебегу функций,  $Q$  - интегрирование приводит к ряду естественных результатов. Весьма неудобным фактом, затрудняющим привлечение  $Q$  - интеграла и  $Q'$  - интеграла к исследованию различных задач теории функций, является отсутствие свойства аддитивности, т.е. из  $Q$  - интегрируемости ( $Q'$  - интегрируемости) двух функций еще не следует  $Q$  - интегрируемость ( $Q'$  - интегрируемость) их суммы. Если же к определению  $Q$  - интегрируемости ( $Q'$  - интегрируемости) измеримой на отрезке  $[a, b]$  функции  $h$  добавить условие

$$\lambda m\{x \in [a, b]: |h(x)| > \lambda\} = o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (9)$$

где  $m$  – мера Лебега, то  $Q$  - интеграл и  $Q'$  - интеграл совпадают ( $Q[a, b] = Q'[a, b]$ ), и эти интегралы становятся аддитивными.

**Определение 2.** Если  $h \in Q'[a, b]$  (либо  $h \in Q[a, b]$ ) и выполняется условие (9), то функция  $h$  называется  $A$  - интегрируемой на  $[a, b]$  ( $h \in A[a, b]$ ) и предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [h(x)]^n dx$  (либо предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [h(x)]_n dx$ ) в этом случае обозначается  $(A) \int_a^b h(x) dx$ .

Пусть функция  $f$  задана на окружности  $T$ . Если функция  $h(\theta) = e^{i\theta} f(e^{i\theta})$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$   $A$  - интегрируема на отрезке  $[0, 2\pi]$ , то функция  $f$  называется  $A$  - интегрируемой на  $T$  и обозначается

$$(A) \int_T f(\tau) d\tau = (A) \int_0^{2\pi} i e^{i\theta} f(e^{i\theta}) d\theta.$$

**Определение 3.** Пусть  $h \in L[0, 2\pi]$ .  $2\pi$  - периодическая функция

$$\bar{h}(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\{\theta \in [0, 2\pi); |\theta - t| > \varepsilon\}} \operatorname{ctg} \frac{t - \theta}{2} h(\theta) d\theta, \quad t \in [0, 2\pi),$$

называется функцией, сопряженной функции  $f$ .

П.Л.Ульяновым [5] доказано следующее свойство сопряженных функций.

**Теорема А [5].** Если  $h \in L[0, 2\pi]$  и  $g$  такая ограниченная функция, что  $\bar{g}$  также является ограниченной функцией, то функция  $\bar{h}(\theta)g(\theta)$   $A$ -интегрируема на отрезке  $[0, 2\pi]$  и имеет место равенство

$$\int_0^{2\pi} \bar{g}(\theta)h(\theta)d\theta = -(A) \int_0^{2\pi} \bar{h}(\theta)g(\theta)d\theta.$$

**Теорема 1.** Пусть  $f \in L(T)$ ,  $F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - z}$ ,  $z \in D^+$  – интеграл типа Коши функции  $f$ . Для коэффициентов Тейлора  $a_k$ ,  $k \in Z_+$  при разложении функции  $F^+(z)$  в ряд Тейлора (1) имеют место равенства

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} (A) \int_T \tau^{-k-1} F^+(\tau) d\tau, \quad k \in Z_+, \quad (10)$$

где  $F^+(\tau)$  – некасательные граничные значения функции  $F^+(z)$  при  $z \rightarrow \tau \in T$ .

**Доказательство.** Обозначим  $h(\theta) = \frac{1}{2} f(e^{i\theta})$ . Тогда

$$\begin{aligned} F^+(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{i\theta} h(\theta) d\theta}{e^{i\theta} - z} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} h(\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} h(\theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta = F_1(z) + c_0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $F_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} h(\theta) d\theta$ ,  $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta$ .

Если  $u(re^{i\varphi})$  – интеграл Пуассона функции  $h$ , а  $\mathcal{G}(re^{i\varphi})$  – функция, гармонически сопряженная с  $u(re^{i\varphi})$ , то  $F_1(z) = u(z) + i\mathcal{G}(z)$ ,  $z = re^{i\varphi}$ , и поэтому (см. [6])

$$F_1(\tau) = F_1(e^{i\theta}) = h(\theta) + i\bar{h}(\theta),$$

где  $F_1(\tau)$  – некасательные граничные значения функции  $F_1(z)$  при  $z \rightarrow \tau \in T$ . Тогда из (11) получим, что

$$F^+(\tau) = F^+(e^{i\theta}) = h(\theta) + i\bar{h}(\theta) + c_0. \quad (12)$$

Из равенства (3) следует, что

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_T \tau^{-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta = 2c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [h(\theta) + c_0] d\theta.$$

С другой стороны, из теоремы А следует равенство

$$(A) \int_0^{2\pi} \bar{h}(\theta) d\theta = 0.$$

Отсюда и из аддитивности  $A$  - интеграла получим

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [h(\theta) + c_0] d\theta + \frac{1}{2\pi} (A) \int_0^{2\pi} i\bar{h}(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} (A) \int_0^{2\pi} [h(\theta) + i\bar{h}(\theta) + c_0] d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F^+(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_T \tau^{-1} F^+(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Теперь докажем равенство (10) для  $k \in N$ . Из равенства (12) и из теоремы А следует, что

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_T \tau^{-k-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} f(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\cos k\theta - i \sin k\theta] h(\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} (A) \int_0^{2\pi} [\sin k\theta + i \cos k\theta] \bar{h}(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Отсюда и из аддитивности  $A$  - интеграла получим

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos k\theta - i \sin k\theta] h(\theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} (A) \int_0^{2\pi} [\sin k\theta + i \cos k\theta] \bar{h}(\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} (A) \int_0^{2\pi} [\cos k\theta - i \sin k\theta] [h(\theta) + i\bar{h}(\theta) + c_0] d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} (A) \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} F^+(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi i} (A) \int_T \tau^{-k-1} F^+(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $f \in L(T)$ ,  $F^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z}$ ,  $z \in D^-$  – интеграл типа Коши функции  $f$ . Для коэффициентов Тейлора  $b_k$ ,  $k \in N$  при разложении функции  $F^-(z)$  в ряд Тейлора (2) имеет место равенства

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} (A) \int_T \tau^{k-1} F^-(\tau) d\tau, \quad k \in N, \quad (13)$$

где  $F^+(\tau)$  – некасательные граничные значения функции  $F^+(z)$  при  $z \rightarrow \tau \in T$ .

**Доказательство.** Известно, что (см. [6]) граничные значения  $F^+(\tau)$  и  $F^-(\tau)$  функций  $F^+(z)$  и  $F^-(z)$  удовлетворяют равенство

$$F^+(\tau) - F^-(\tau) = f(\tau) \quad (14)$$

почти для всех точек  $\tau \in T$ . Обозначим  $h(\theta) = \frac{1}{2} f(e^{i\theta})$ . Тогда из равенств (12) и (14) получим, что

$$F^-(\tau) = F^-(e^{i\theta}) = -h(\theta) + i\bar{h}(\theta) + c_0. \quad (15)$$

Из равенств (4), (15) и из теоремы А следует

$$\begin{aligned} b_k &= -\frac{1}{2\pi i} \int_T \tau^{k-1} f(\tau) d\tau = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} f(e^{i\theta}) d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\cos k\theta + i \sin k\theta] h(\theta) d\theta = \\ &= -\frac{1}{\pi} (A) \int_0^{2\pi} [\sin k\theta - i \cos k\theta] \bar{h}(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Отсюда и из аддитивности  $A$  - интеграла получим

$$\begin{aligned} b_k &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos k\theta + i \sin k\theta] h(\theta) d\theta - \frac{1}{2\pi} (A) \int_0^{2\pi} [\sin k\theta - i \cos k\theta] \bar{h}(\theta) d\theta = \\ &= -\frac{1}{2\pi} (A) \int_0^{2\pi} [\cos k\theta + i \sin k\theta] [h(\theta) - i\bar{h}(\theta) - c_0] d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} (A) \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} F^-(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi i} (A) \int_T \tau^{-k-1} F^+(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В.И. Sur les valeurs limites des fonctions regulieres a l'interieur d'un cercle, Ж. Ленингр. физ. – матем. об-ва, 2:2 (1928), 22–37.

2. Хавин В.П. Граничные свойства интегралов типа Коши и гармонически сопряженных функций в областях со спрямляемой границей. Матем. сб., 68(110):4 (1965), 499–517.
3. Кусис П. Введение в теорию пространств  $H^p$ . М.: Мир, 1984.
4. Titchmarsh E.C., On Conjugate Functions, Proceedings of the London Math. Soc., 9 (1929), 49–80.
5. Ульянов П.Л.,  $A$  – интеграл и сопряженные функции. Уч. Записки Моск. Гос. Ун-та, 181 (1956), 139–157.
6. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. М-Л.: ГИТТЛ, 1950.

## KOŞI TIPLİ İNTEQRALLARIN TEYLOR ƏMSALLARI HAQQINDA

**R.Ə.ƏLİYEV**

### XÜLASƏ

İşdə  $A$  - inteqral anlayışından istifadə edilərək Lebeq mənadında inteqrallanan funksiyaların Koşi tipli inteqralları üçün Teylor ayrılışı əmsallarının hesablanması düsturu alınmışdır.

**Açar sözlər:** Koşi tipli inteqral, toxunmayan sərhəd qiymətləri, Teylor ayrılışı, Teylor əmsalları,  $A$  - inteqral.

## ABOUT TAYLOR'S COEFFICIENTS OF CAUCHY TYPE INTEGRALS

**R.A.ALIYEV**

### SUMMARY

Using the concept of  $A$  - integration, the formula of calculation of coefficients of Taylor's decomposition is received for Cauchy type integrals of integrated functions.

**Keywords:** Cauchy type integral, nontangential boundary values, Taylor's decomposition, Taylor's coefficients,  $A$  - integral.

*Поступила в редакцию: 04.04.2014 г.*

*Подписано к печати: 04.07.2014 г.*